Computereinsatz in der Veranstaltung Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra

Hans-Wolfgang Henn, Frauke Link
(Technische Universität Dortmund)

wolfgang.henn@tu-dortmund.de
frauke.link@tu-dortmund.de

Computer sind aus der Welt, in der wir leben, nicht mehr wegzudenken. Nicht nur Mathematiker, auch der „Rest der Welt“ setzt Computer ein: Physiker simulieren Experimente, Ingenieure konstruieren Brücken, Ärzte nutzen Computer als Datenbank, Designer nutzen Bezierkurven zur Gestaltung von Formen.

Wofür nutzen Mathematiker in ihrer Disziplin den Computer? Mit einem schnellen Rechner lassen sich beispielsweise im Rahmen der Zahlentheorie große Mengen von Beispielen produzieren, aus denen möglicherweise Vermutungen abgeleitet werden können. Numeriker interessieren sich für die Struktur von Algorithmen und ihre Effizienz.

Studierende der Mathematik müssen also über den Alltagsgebrauch hinaus Erfahrungen mit dem Computer sammeln. So hat sich in Dortmund und in vielen anderen Universitäten durchgesetzt, dass alle angehenden Mathematikerinnen und Mathematiker zu Beginn des Studiums einen Programmierkurs absolvieren müssen. Oft bleibt es für die Studierenden jedoch dabei, dass sie etwa im Rahmen eines zweiwöchigen Blockkurses die Grundkenntnisse zum Programmieren von einfachen Algorithmen erwerben.

Unser Interesse betrifft die Lehramtsstudierenden, genauer die zukünftigen Gymnasiallehrerinnen und -lehrer. Sie werden im Laufe ihres Studiums vielleicht einmal Numerik als Fach belegen und sollten daher programmieren können. Aber sie sollen ja vor allem für das Leben nach der Universität lernen, und das ist für sie das Unterrichten in der Schule.

Anders als der zukünftige Versicherungsmathematiker oder die Promovendin der Numerik müssen die Lehramtstudierenden das technische Hilfsmittel Computer später einem breiteren Publikum, ihren Schülern, als Hilfsmittel vertraut machen; Schüler, die vielleicht in einigen wenigen Fällen Mathematiker, eher aber Physiker, Ärzte, Designer, Ingenieure oder sonst etwas werden wollen. Dies stellt besondere Anforderungen für das Lehren und Lernen an der Universität, um die neuen Möglichkeiten für das Lehren und Lernen an der Schule sinnvoll zu nutzen. Diese Möglichkeiten sollten nicht überschätzt, aber auch nicht unterschätzt werden.

Computer leisten im Mathematikunterricht der Schule im Wesentlichen zwei Dinge: Sie haben – meistens in Form von Taschenrechnern – Werkzeugcharakter, entlasten also von Kalkülen und dienen dem Ausführen von Algorithmen. Dabei sind diese „Taschenrechner“ in der Schule schon oft kleine CAS, die Lösungen für Gleichungen mühelos algebraisch oder numerisch bestimmen sowie ableiten und integrieren können. Ein gewissenhafter Lehrer wird nicht nur das „Knöpfchen-Drücken“ lehren, sondern auch über die zugrunde liegenden Algorithmen sprechen. Zweitens ermöglichen Computer Visualisierungen, die ohne sie nicht möglich wären, und unterstützen damit u. A. den Aufbau adäquater Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen und Inhalten. So lassen sich mühelos Graphen von Funktionen zweier Variablen darstellen, was an einer Schultafel kaum möglich wäre (Abb. 1).

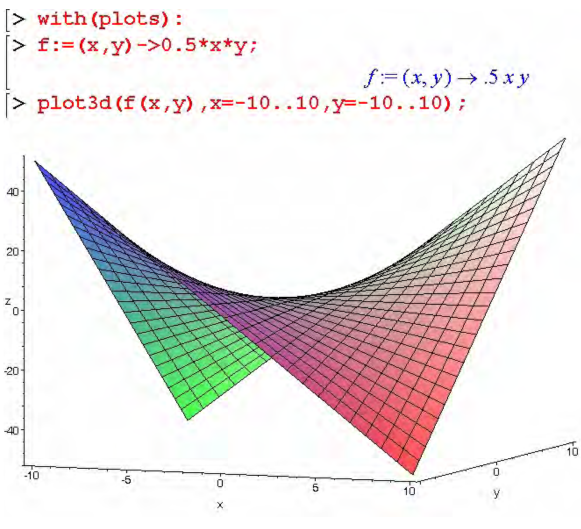

Abbildung 1: *Visualisierung einer Funktion mit Maple*

Mit dynamischer Geometriesoftware lassen sich geometrische Objekte nach dem Zeichnen bewegen, so dass eine neue Dimension der Exploration geometrischer

Zusammenhänge und Sätze möglich wird. Ein einziger Zug mit der Maus gibt eine bessere Vorstellung von „allen“ möglichen Dreiecken im Thaleskreis – und stellt auch neue Anforderungen an die „Beweis-Kultur“ (Abb. 2).

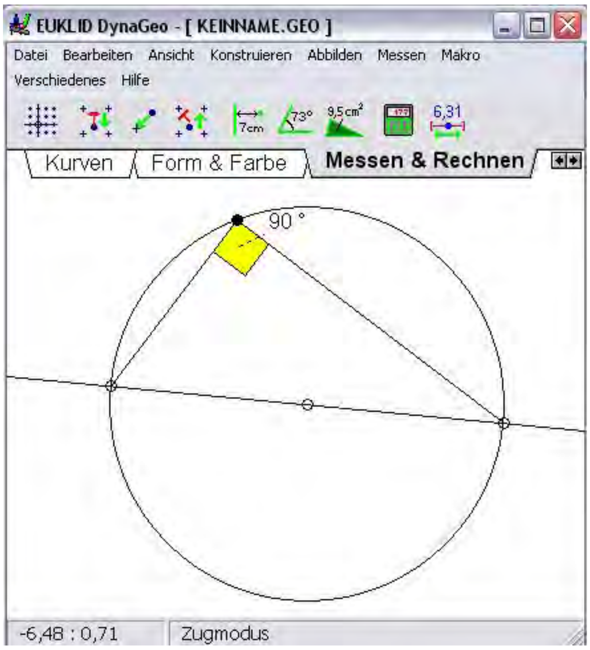

Abbildung 2: *Thaleskreis mit DynaGeo*

Wir als Mathematikdidaktiker interessieren uns für die noch weithin offenen Fragen, ob und wie viel Computereinsatz in der Schule sinnvoll ist, inwiefern und welche neue Software für das Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule geeignet scheint, und insbesondere dafür, was Studierende des Lehramts Mathematik an Software im Studium kennen lernen müssen, damit sie diese später im eigenen Unterricht sinnvoll einsetzen können.

Dass diese Fragen eng miteinander verknüpft und mitnichten trivial sind, möchten wir am Beispiel unserer Veranstaltung *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra* andeuten.

Seit der „Neuen Mathematik“ dominiert im Schulcurriculum in Deutschland die sogenannte „Lineare Algebra“. Es werden Gleichungssysteme (nach vorgeschriebenen Verfahren) gelöst, ohne Anschauung Schnittpunkte von Ebenen und Geraden oder Winkel zwischen fiktiven, sich schneidenden Geraden berechnet. Diese Verarmung der Analytischen Geometrie wird auch in der Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe (Borneleit et al., 2001) angeprangert. Die CAS „stören“ den Unterricht, da sie die handwerkliche Tätigkeit des Rechnens abnehmen und dabei viele traditionelle Aufgaben sinnlos machen. Nichtsdestotrotz wurde der prominente Lambacher-Schweizer 2007 auch als Version für CAS herausgegeben, die sich von der Originalversion nur darin unterscheidet, dass bei allen Aufgaben angegeben wurde, wie die Rechnungen in den Rechner eingegeben werden. Die Aufgaben selbst wurden nicht geändert!

Die geometrischen Vorstellungen, die der Linearen Algebra zugrunde liegen, gehen aber ohne explizite Behandlung in der Schule unter. Zu diesen zählen beispielsweise „global“ das räumliche Vorstellungsvermögen und „lokal“ die Vorstellung eines Pfeils als Repräsentant eines Vektors. Solche fehlenden Vernetzungen sind Schülerinnen und Schülern später im Studium der Mathematik (was nicht nur Mathematikstudierende betrifft!) hinderlich (vgl. Fischer, 2007).

In unserer Veranstaltung (für Gymnasial-Studierende im Hauptstudium bzw. im Master) versuchten wir, ein CAS (wir verwendeten das TI-Nspire Handheld CAS) sinnvoll einzusetzen und den geometrischen Aspekt durch die CAS-bedingt freiwerdenden Zeitressourcen zu stärken. Als gute Ergänzung zum CAS erwiesen sich ein DGS (wir verwendeten DynaGeo) und vor allem das 2003 erschienene Programm Archimedes Geo3D von Andreas Göbel (Abb. 3).

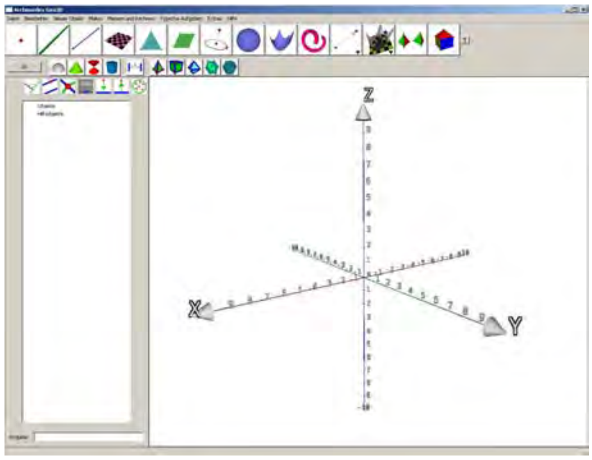

Abbildung 3: *Archimedes Geo3D*

Hierbei handelt es sich um eine dreidimensionale DGS, bei der Ebenen z. B. durch die Vorgabe dreier Punkte im Raum (durch Anklicken) oder durch eine Gleichung definiert werden können. Die Lösung eines 3×3-LGS lässt sich somit auch grafisch visualisieren. Was die Addition zweier Gleichungen und die Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar geometrisch bedeuten, lässt sich einfach simulieren und ist unseren Studierenden meistens unbekannt. Mit Archimedes lassen sich auch Affine Abbildungen, Kegelschnitte und vieles andere darstellen.

Ein Beispiel, das in den Mathematikbüchern für die Oberstufe im Rahmen der Linearen Algebra immer wieder genannt wird, ist die sogenannte „Flugsicherung“; Abb. 4 zeigt mit einem Screenshot eines Films die Realität der Flugsicherung.

Erhältlich unter www.raumgeometrie.de
Erhältlich unter www.flugsicherung.dfs.de

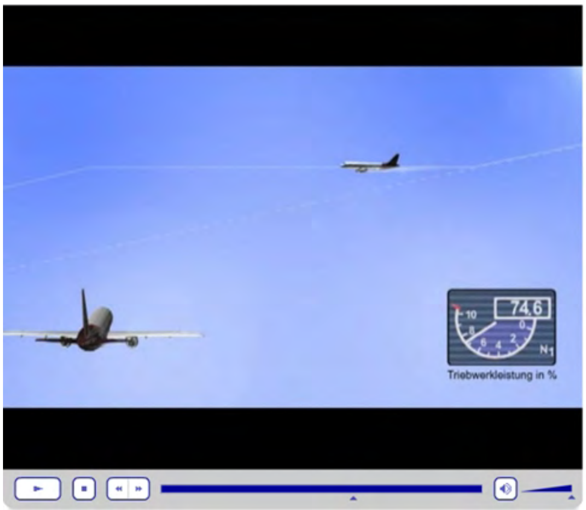

Abbildung 4: *Flugsicherung*

Dies ist ein im Grunde sehr schönes, anschauliches Beispiel für Geraden im $\mathbb{R}^3$, auf denen sich Flugzeuge bewegen. Eine sorgfältige Modellierung der Situation gibt Anhaltspunkte darüber, wie Flugzeuge gelotst werden können, so dass sie sich trotz unterschiedlich gerichteter räumlicher Bewegung nicht treffen. Dieser Kontext wird allerdings von den Schulbüchern häufig in seiner Komplexität nicht ernst genommen (vgl. auch Hußmann, 2003). Das „CAS ernst nehmen" heißt hier, reale Daten sammeln (zum Beispiel im Internet nach „Flugsicherung" suchen) und auswerten, den Zusammenhang zu realistischen Einheiten (km, km/h, min) herstellen und verstehen sowie mit Fehlern und Rundungen in den Rechnungen umgehen, anstatt fiktive Geraden vorzugeben, die ein „schönes" Ergebnis liefern. Den raumgeometrischen Aspekt ernst nehmen bedeutet hier, die modellierten Daten, die z. B. zu einer Geradengleichung führen, raumgeometrisch zu visualisieren, um Ergebnisse zu überprüfen. Die *dynamische* Raumgeometriesoftware erlaubt hier zusätzlich, dass eine offensichtlich fehlerhafte Geradengleichung durch den Zugmodus modifiziert werden kann und sich hiermit auch die Gleichung ändert. Dies gibt zunächst den Studierenden (und später den Schülern) die Möglichkeit, von einer noch nicht so angemessenen Lösung ausgehend noch einmal auf die Fehlersuche innerhalb der Rechnung zu gehen. Darüber hinaus wird intuitiv klar, dass die Daten in der Gleichung dynamisch von der Lage des räumlichen Objekts abhängen.

Um die Eigentätigkeit der Studierenden und ihre Kompetenz beim Einsatz der von uns verwendeten Software zu stärken, bekamen sie die Aufgabe, Beispiele zu finden, bei denen sowohl CAS als auch 3D-DGS sinnvoll genutzt werden können. Damit sollte die Sinnhaftigkeit des Einsatzes der verschiedenen Software durch geeignete, selbst konstruierte Lernumgebungen für die Oberstufe deutlich gemacht werden. Die Bearbeitungszeit für die Aufgabe war vier Wochen. Die Studierenden arbeiteten in Viererteams und stellten abschließend ihre Bearbeitung den anderen vor. Es wurden folgende Themen behandelt: Flugsicherung, GPS, Kegelschnitte, Ortslinien.

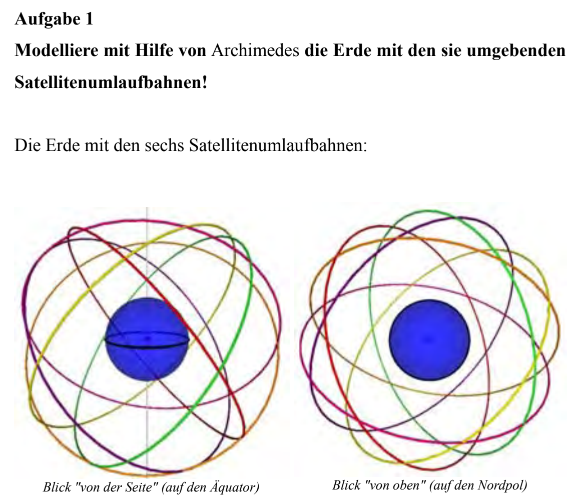

Abbildung 5: *Lernumgebung zum Thema GPS*

Abb. 5 zeigt die von den Studierenden konstruierte Einstiegsaufgabe zum Thema GPS. Im weiteren Aufgabenverlauf wurde von den Studierenden vorgesehen, dass Schülerinnen und Schüler aus vorgegebenen realen Werten eines GPS den beschriebenen Standort mittels CAS selbst ermitteln sollen.

Erfreulicherweise bringen die Studierenden zunehmend Erfahrungen im Umgang mit CAS aus der eigenen Schulzeit mit. Im normalen Mathematikstudium wird jedoch nur wenig Gebrauch von CAS oder anderer schulgeeigneter Software gemacht, der Werkzeugcharakter des Rechners zur Unterstützung des Inhaltsverständnisses geht verloren. Wir halten es deshalb für wichtig, dass alle Studierenden (nicht nur die Lehramtskandidaten) schon in den Anfängervorlesungen mit CAS und DGS arbeiten müssen. Zumindest für Lehramtskandidaten erscheint uns dies wichtiger als ein Programmierkurs.

Literatur

[1] Borneleit, P., Dankwerts, R., Henn, H.-W. & Weigand, H.-G. *Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe.* H.-E. Tenorth (Hrsg.): Kerncurriculum Oberstufe. – Weinheim: Beltz (2001), S. 26 – 53.

[2] Fischer, A. *Gegenseitige Beeinflussungen von Darstellungen und Vorstellungen zum Vektorraumbegriff.* Journal für Mathematikdidaktik 28(3/4) (2007), S. 311 – 330.

[3] Hußmann, S. *Mathematik entdecken und erforschen – Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II.* Berlin: Cornelsen (2003).

Eine genauere Beschreibung der Lernumgebungen wird im 2010-Tagungsband des GDM-Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik veröffentlicht werden.